Anwendung der Laurent Entwicklung:

Klassifikation isolierter Singularitäten

Ziel: Wie unterscheiden sich z.B. $\frac{1}{z}$ und $e^{1/z}$ nahe $z = 0$?

Notation: Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei

$$B_r^*(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r \}$$

die punktierte Kreisscheibe um z_0 mit Radius r. Offenbar gilt:

$$\boxed{B_r^*(z_0) = A_{0,r}(z_0)}$$

(Kreisring mit innerem Radius 0)

Def 24.2.2 : (isolierte Singularitäten)

Ist f auf $\overset{*}{B}_r(z_0)$ definiert und holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f.

Bem + Bsple:

1.) Es ist nicht verboten, dass z_0 zum Definitionsbereich (bzw. Holomorphiegebiet) von f gehört. Der Fall ist sozusagen trivial, da man die Singularität beseitigen („heben") kann. Das sieht man aber oft nicht sofort!

Bspl.: $z_0 = 0$, $r > 0$, $f(z) := \dfrac{e^z - 1}{z}$ für $z \neq 0$

Deshalb schließt man dies nicht grundsätzlich aus.

2.) $\boxed{z \mapsto 1/z \quad , \quad z \mapsto e^{1/z}}$ haben isolierte Singularitäten in $z_0 = 0$. (r kann in Def. 24.2.2 beliebig gewählt werden.)

3.) Die Funktion

$$\boxed{f(z) := \frac{1}{(1-z)(2+z)(z-i)}}$$

hat isolierte Singularitäten in

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = i.$$

(Welche Radien kann man jeweils in Def. 24.2.2 um die einzelnen Punkte wählen?)

4.) anschauliche Bedeutung von „isolierter Singularität z_0":

In z_0 hat man über das Verhalten von f keine genaue Information (die will man erst gewinnen!), auf einer punktierten Umgebung von z_0 verhält sich f immerhin gut, d.h. f ist holomorph.

Es darf also nicht passieren, dass f auf einer Folge $z_k \to z_0$ „Fehl-verhalten" zeigt. In einem solchen Fall ist z_0 keine isolierte Singularität.

Diesen Fall gibt es auch!

<u>Beispiel</u> : $\boxed{f(z) := 1/\sin(z^{-1})}$

ist singulär in $z_0 = 0$, aber auch in $z_k := \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $z_k \longrightarrow z_0$, $k \to \infty$.

Um das <u>Verhalten von</u>

$$f : \overset{*}{B_r}(z_0) \xrightarrow[\text{holom.}]{} \mathbb{C}$$

in der Nähe der <u>isolierten Singularität</u> z_0 beschreiben zu können, bedienen wir uns der

$$\left.\begin{array}{l}\text{Laurent Entwicklung}\\ \text{von } f \text{ auf } \overset{*}{B_r}(z_0)\end{array}\right\} : \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$\boxed{\text{Def } 24.2.3}$: Sei $f : \overset{*}{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$

eine holomorphe Funktion.

i) z_0 hebbare Singularität $:\Longleftrightarrow$

Hauptteil der Laurent Reihe $\equiv 0$

$\left(a_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \right)$

ii) z_0 Polstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N} :\Longleftrightarrow$

$$\text{Hauptteil} = \sum_{n=1}^{p} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

mit $\boxed{a_{-p} \neq 0}$

Funktionen f, die nur Polstellen als Singularitäten besitzen, heißen

meromorphe Funktionen

iii) z_0 wesentliche Singularität

$:\Longleftrightarrow$ der Hauptteil enthält ∞ viele Glieder $\neq 0$

Bemerkungen + Beispiele :

1) Standardbeispiele für meromorphe Funktionen
Quotienten $\frac{f(z)}{g(z)}$ von Polynomen f, g

2) Es sei $\boxed{f(z) := \frac{e^z - 1}{z}}$

mit isolierter Singularität in $z_0 = 0$.

Laurent - Entwicklung :

$$\frac{e^z - 1}{z} = z^{-1} \sum_{k=\underline{\underline{1}}}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^{l} =: g(z)$$

also: Hauptteil $\equiv 0$; die Funktion g ist holomorph auf $\mathbb{C}$, also wird f durch $f(0) := 1$ holomorph in 0 fortgesetzt.

3.) $\boxed{f(z) := \frac{1}{(z-1)^2 \, (z+i)}}$ hat Pole in $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$. Die Ordnung von z_1 ist 2, die Ordnung von z_2 offenbar gleich 1.

Formale Begründung (Übung!): bestimme die Laurent Reihen von f

z.B. auf $\overset{*}{B}_1(1)$ und $\overset{*}{B}_1(-i)$.

4.) $\boxed{f(z) := e^{1/z}}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, denn

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} =$$

$$\underset{\text{Nebenteil}}{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}}_{\text{Hauptteil}}$$

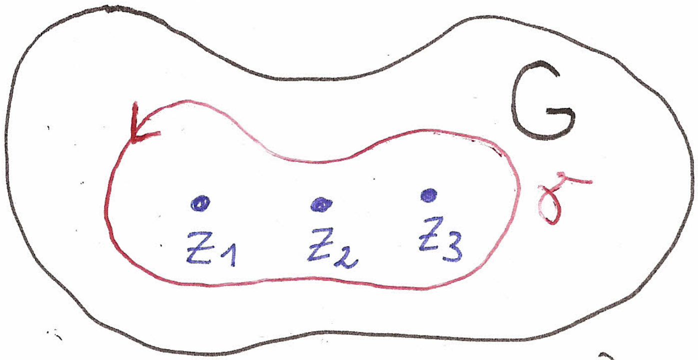
5) $\boxed{f(z) := z^2 + (z-1)^{-4}}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4.

$\square$

Kapitel 25 Der Residuensatz

Situation:

G einfach zusammenhängendes Gebiet,
γ einfach geschlossener Weg in G,
der positiv orientiert ist



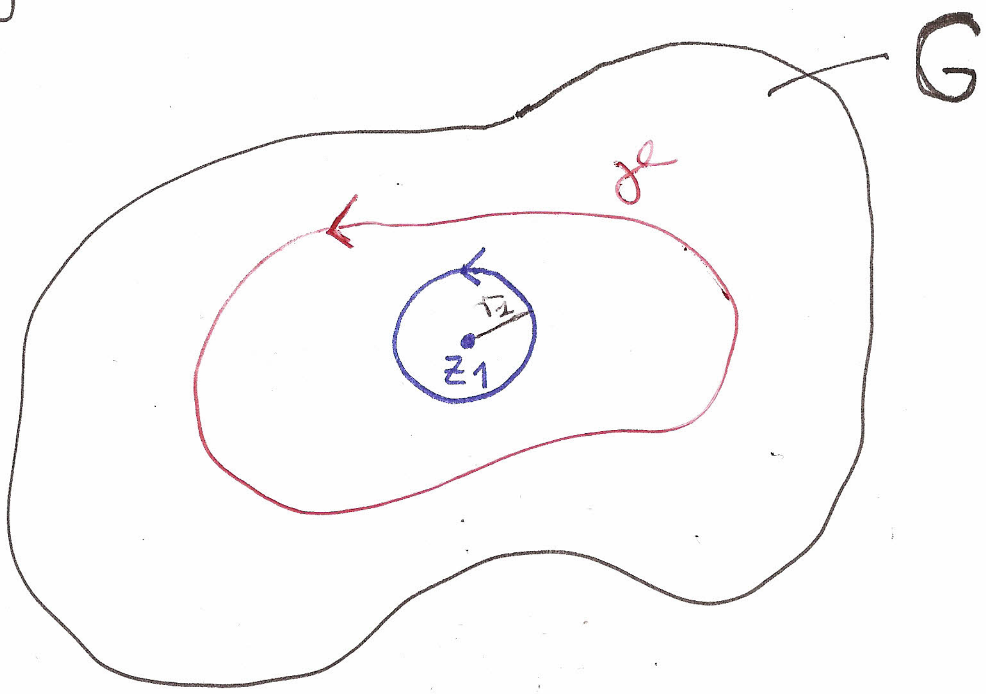
wir wissen:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ auf } G \text{ holomorph} \overset{}{\underset{\text{Cauchy Integralsatz}}{\Longrightarrow}} \\ \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \end{array} \right\}$$

Frage:

Welchen Wert hat das Integral, wenn γ isolierte Singularitäten von f einschließt?

eine Singularität z_1:



f holomorph auf $G - \{z_1\}$; wähle

$(*)$ $\overline{B_{r_1}(z_1)} \subset$ Inneres von γ;

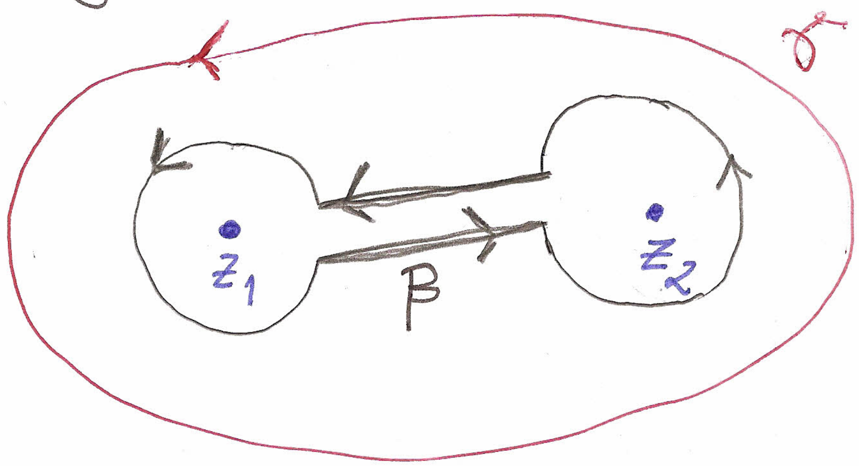
Verallgemeinerung des Cauchy Integralsatze

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial B_{r_1}(z_1)} f(z)\,dz,$$

und dieses Ergebnis gilt für alle r_1.

mit $(*)$

zwei Singularitäten z_1, z_2 :



f holomorph auf $G - \{z_1, z_2\}$; wähle

$r_1, r_2 > 0$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{B_{r_1}(z_1)} \cap \overline{B_{r_2}(z_2)} = \emptyset \quad \underline{\text{und}} \\ \overline{B_{r_k}(z_k)} \subset \text{Inneres von } \gamma \end{array} \right.$$

Weg β wie im Bild $\xRightarrow[\text{von Cauchy's Satz}]{\text{Verallgemeinerung}}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz$$

betrachte den „Grenzübergang"
beim Weg β $\Longrightarrow$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{Z} \int_{\mathcal{K}_{r_k}(z_k)} f(z)\,dz$$

Liegen die Singularitäten $z_1, \ldots, z_N$ im Inneren von γ und ist f holomorph auf $G - \{z_1, \ldots, z_N\}$, so folgt induktiv

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathcal{K}_{r_k}(z_k)} f(z)\,dz,$$

wobei $\overline{B_{r_k}(z_k)} \subset$ Inneres von γ und paarweise disjunkt, ansonsten mit beliebigen Radien.

Man hat sich also mit folgenden Größen zu beschäftigen:

Def 25.1.1: „Residuum" (von f in z_0)

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Funktion f sei holomorph auf $B_r^*(z_0)$. Dann heißt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(z_0)} f(z)\,dz =: \operatorname{res}_{z_0} f \qquad (\text{oder: } \operatorname{Res}_{z_0} f)$$

das Residuum von f an der isolierten Singularität z_0. Nach der Verallgemeinerung von Cauchy's Satz kann $\rho \in (0, r)$ beliebig gewählt werden. [oder durch eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve